ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

TRẦN THỊ PHƯỢNG

MỘT SỐ ĐA THỨC ĐẶC BIỆT VÀ TÍNH CHẤT

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2017

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

TRẦN THỊ PHƯỢNG

MỘT SỐ ĐA THỨC ĐẶC BIỆT VÀ TÍNH CHẤT

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp
Mã số: 60 46 01 13

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:
PGS.TS. ĐÀM VĂN NHỈ

THÁI NGUYÊN - 2017

Mục lục

Lời cảm ơn

Trong quá trình học tập và nghiên cứu tại Trường Đại học Khoa học – Đại học Thái Nguyên, tôi được nhận đề tài nghiên cứu "Một số đa thức đặc biệt và tính chất" dưới sự hướng dẫn của PGS. TS Đàm Văn Nhỉ. Đến nay, luận văn đã được hoàn thành. Có được kết quả này là do sự dạy bảo và hướng dẫn tận tình và nghiêm khắc của Thầy. Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc tới Thầy và gia đình!

Tôi cũng xin gửi lờn cảm ơn chân thành đến Ban giám hiệu, Phòng Đào tạo sau đại học và Khoa Toán – Tin của Trường Đại học Khoa học – Đại học Thái Nguyên đã tạo mọi điều kiện thuận lợi giúp đỡ tôi trong quá trình học tập tại trường và trong thời gian nghiên cứu hoàn thành luận văn này. Sự giúp đỡ nhiệt tình và thái độ thân thiện của các thầy, cô giáo, các cán bộ thuộc Phòng Đào tạo, Khoa Toán – Tin đã đã để lại trong lòng mỗi chúng tôi những ấn tượng tốt đẹp. Không biết nói gì hơn, một lần nữa tôi xin trân trọng cảm ơn.

Tôi xin chân thành cảm ơn gia đình, bạn bè, đồng nghiệp và các thành viên trong lớp cao học Toán K9N (Khóa 2015-2017) đã quan tâm, tạo điều kiện, cổ vũ và động viên để tôi có thể hoàn thành nhiệm vụ của mình.

Thái Nguyên, ngày .... tháng... năm 2017

Tác giả

Trần Thị Phượng

Mở đầu

Vào năm 1713 Jacob Bernoulli đã xét một dãy vô hạn các số viết thành dạng đơn giản. Nhiều kết quả đạt được của Bernoulli đã được trình bày trong cuốn sách *"Ars conjectandi"*. Đặc biệt, một số kết quả được ông phát hiện qua việc xét tổng các lũy thừa các số nguyên dương dạng

$$S_p(n) = 1^p + 2^p + 3^p + \cdots + n^p, n \in \mathbb{N}^*.$$

Ông đã chỉ ra $S_p(n)$ được viết thành đa thức bậc $p+1$ của n như sau:

$$S_p(n) = \frac{1}{p+1}n^{p+1} + \frac{1}{2}n^p + \frac{1}{2}\binom{p}{1}An^{p-1} + \frac{1}{4}\binom{p}{3}Bn^{p-3} + \cdots$$

với hệ số hữu tỷ $A = \frac{1}{6}$, $B = -\frac{1}{30}$, $C = \frac{1}{42}$, $D = -\frac{1}{30}, \ldots$ và các hệ số này được xem như các *số Bernoulli.*

Muộn hơn, trong "L. Euler, *Methodus generalis summandi progressiones,* Comment. Acad. Sc. Petropolitanae, 6(1738)" Euler cũng đã nghiên cứu độc lập với Bernoulli và cũng đưa ra các số hữu tỷ $A = \frac{1}{6}$, $B = -\frac{1}{30}$, $C = \frac{1}{42}$, $D = -\frac{1}{30}, \ldots$ Vào năm 1748, Euler đã chỉ ra sự liên hệ giữa các tổng vô hạn

$$S(2n) = \frac{1}{1^{2n}} + \frac{1}{2^{2n}} + \cdots = \alpha_n \pi^{2n}$$

và các hệ số hữu tỷ α_n chứa cùng dãy các số $A, B, C, D, \ldots$ Đặc biệt, Euler còn nhận được nhiều kết quả thú vị về các số trên qua hệ số trong việc biểu diễn các hàm $\tan x, \cot x, \frac{1}{\sin x}$. Do vậy, để có thể hiểu và nghiên cứu kỹ về các số do Bernoulli hay Euler phát hiện ra hoặc tiếp tục phát hiện ra tính chất của dãy số Fibonacci, dãy số Lucas và học phương pháp đa thức để mong tìm kiếm những tính chất liên quan giữa các số hữu tỷ nên luận văn có đặt vấn đề xét một số đa thức đặc biệt và các đa thức trực giao.

Một vấn đề khác mà luận văn cũng đề cập đến: Đó là việc xét một số bài toán đa thức xuất hiện trong các kỳ thi học sinh giỏi. Trong hầu hết các kì thi học sinh giỏi toán, nhiều bài về đa thức được xem như những bài toán khó. Hiện nay các tài liệu tham khảo và chuyên đề về đa thức chưa nhiều và chưa sâu đủ để vận dụng giải bài thi.

Vì vậy, vấn đề xét một số đa thức đặc biệt và tính chất liên quan là cần thiết cho giáo viên đang dạy phổ thông nói chung và những ai quan tâm đến đa thức nói riêng.

Luận văn "Một số đa thức đặc biệt và tính chất" trình bày một số vấn đề liên quan đến đa thức trực giao, đa thức đặc biệt: Chebyshev, Legendre, Bernoulli, Fibonacci và ứng dụng liên quan. Mục đích của nó nhằm thể hiện rõ vai trò hữu ích của một số đa thức đặc biệt trong một số vấn đề về đa thức, số học và bài thi học sinh giỏi.

Luận văn gồm mở đầu, 2 chương và kết luận

Chương I: Đa thức trực giao. Trong chương này chúng tôi nhắc lại một số khái niệm cơ bản về không gian Euclid, phương pháp trực giao hóa Gram - Schmidt, đa thức Chebyshev, và Legendre.

Chương II: Trong chương này đầu tiên chúng tôi trình bày về đa thức Bernoulli, tiếp đó là dãy đa thức $(a_n(x))$ và cuối cùng là những vận dụng vào giải các bài toán trong các kỳ thi học sinh giỏi, toán Olympic quốc tế.

Chương 1

Đa thức trực giao

Các kết quả được trích dẫn từ các tài liệu [1], [2], [4]

1.1 Phương pháp trực giao hóa Gram-Schmidt

1.1.1 Không gian véc tơ Euclid

Định nghĩa 1.1.1. Không gian véc tơ V trên trường $\mathbb{R}$ được gọi là *không gian véc tơ Euclid* nếu mỗi cặp véc tơ $(x, y) \in V^2$ ta cho tương ứng với một số thực, ký hiệu $\langle x, y\rangle$ và nó được gọi là *tích vô hướng,* thỏa mãn các tính chất: Với mọi $x, x', y \in V$ và $a \in \mathbb{R}$ ta luôn có

(1) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$

(2) $\langle x + x', y\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x', y\rangle$

(3) $\langle ax, y\rangle = a\langle y, x\rangle$

(4) $\langle x, x\rangle \geqslant 0$ và dấu $=$ xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$.

Định nghĩa 1.1.2. Trong không gian véc tơ Euclid V trên trường $\mathbb{R}$, hai véc tơ $x, y \in V$ được gọi là *trực giao* hoặc *vuông góc với nhau* và được ký hiệu $x \perp y$ nếu $\langle x, y\rangle = 0$. *Chuẩn* hay *độ dài* của véc tơ x được định nghĩa bằng số thực không âm $\sqrt{\langle x, x\rangle}$ và ký hiệu qua $|x|$. Khi $|x| = 1$ thì véc tơ x còn được gọi là *véc tơ trực chuẩn.*

Ví dụ 1.1.3. (i) Không gian $\mathbb{R}^n$ là một không gian Euclid với tích vô hướng

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n.$$

Trong đó $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ và $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$.
(ii) Tập tất cả các dãy số thực vô hạn

$$l_2 = \{x := (x_1, \ldots, x_n); \sum_{n=0}^{\infty} x_n^2 < \infty\}$$

lập thành không gian Euclid vô hạn chiều với tích vô hướng

$$\langle x, y\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} x_ny_n$$

Thật vậy, sự hội tụ của chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_ny_n$ được suy ra từ sự hội tụ của chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n^2$ và $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n^2$, nên tích vô hướng được hoàn toàn xác định. Ta có thể dễ dàng kiểm tra được các tính chất nêu trên.
(iii) Không gian các hàm số thực $C[a, b]$ liên tục trên đoạn $[a, b], a < b$, lập thành không gian Euclid vô hạn chiều với tích vô hướng

$$\langle x, y\rangle = \int\limits_a^b f(t)g(t)dt.$$

(iv) Nếu $F \subset E$ là không gian véc tơ con của không gian Euclid E thì F cũng là không gian Euclid với phép nhân vô hướng cảm sinh trên F.

1.1.2 Phương pháp trực giao hóa Gram-Schmidt

Để xây dựng một cơ sở trực chuẩn, ta sử dụng phương pháp trực giao hóa Gram-Schmidt. Giả sử $e_1, e_2, \ldots, e_n$ là một cơ sở nào đó của không gian véc tơ Euclid V. Khi đó cơ sở trực giao có thể xây dựng bằng phương pháp quy nạp như sau:

(1) Bước đầu: Lấy $f_1 = e_1$.

(2) Bước giả sử: Giả sử $f_1, \ldots, f_k$ đã được xây dựng.

(3) Bước xây dựng f_{k+1} : Đặt $f_{k+1} = e_{k+1} - a_1 f_1 - \cdots - a_k f_k$ với $a_i = \dfrac{\langle e_{k+1}, f_i \rangle}{\langle f_i, f_i \rangle}$, $i = 1, \ldots, k$. Công thức tính hệ số a_i được suy ra từ điều kiện $\langle f_k, f_i \rangle = 0$.

Sau khi đã xây dựng xong $f_1, \ldots, f_n$ ta chuẩn hóa $x_k = \dfrac{f_k}{|f_k|}$ với mọi $k = 1, 2, \ldots, n$.

1.2 Đa thức trực giao

1.2.1 Khái niệm đa thức trực giao

Với trường K ta xét vành $\mathbb{R}[x] = \{f = f(x) = \sum\limits_{s=0}^{n} a_s x^s | n \in \mathbb{N}, a_s \in \mathbb{R}\}$. Xây dựng tập V như sau: Với mọi $f, g \in \mathbb{R}[x]$ và $a \in \mathbb{R}$ có $f, g \in V$, $f + g \in V, af \in V$. Khi đó V là một *không gian véc tơ* trên $\mathbb{R}$ hay $\mathbb{R}$-*không gian véc tơ*.

Giả sử $\omega(x)$ là một hàm xác định dương và liên tục trên đoạn $[a, b]$, ở đó $a < b$. Định nghĩa *tích trong* trên V với hàm *trọng số* $\omega(x)$ qua:

$$\langle f, g \rangle = \int\limits_a^b f g \omega(x) dx.$$

Mệnh đề 1.2.1. *Với mọi đa thức $f, g, h \in V$, $a, b \in K$, ta có các hệ thức*

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle &= \langle g, f \rangle \\ \langle af + bg, h \rangle &= a\langle f, h \rangle + b\langle g, h \rangle \end{aligned}$$